PREAMBULE

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.
Les parties II, III et IV sont indépendantes.

NOTATIONS

Soient d et m deux entiers strictement positifs.
Les espaces IR^d et IR^m sont munis de leur norme euclidienne standard notée $\|\cdot\|$.
Si $a \in IR^d$ et $r \in]0,+\infty[$, on note $B(a,r) = \{z \in IR^d \ / \|z-a\| < r\}$.
Si $x \in IR^d$ et si $z \in IR^d$, on note $]x,z[= \{(1-\theta)x + \theta z \ / \ \theta \text{ réel}, \theta \in]0,1[\}$.
$\mathcal{L}(IR^d, IR)$ désigne l'espace des applications linéaires de IR^d dans IR.
Si $L \in \mathcal{L}(IR^d, IR)$ et si $h \in IR^d$, $\langle L,h \rangle$ désigne la valeur de L au point h.
Sur $\mathcal{L}(IR^d, IR)$, on considère la norme $\|L\|_{\mathcal{L}} = \sup_{u \in B(0,1)} |\langle L,u \rangle|$.
La différentielle d'une application au point a est notée $g'(a)$.
Soit Ω une partie non vide de IR^d, soit Y une partie non vide et compacte de IR^m.
Soit une application continue $f : \Omega \times Y \to IR$.
Pour chaque $x \in \Omega$, on définit $V(x) = \sup_{y \in Y} f(x,y)$.

PARTIE I

Dans cette partie, nous étudions des propriétés topologiques de V.

1/ Expliquer pourquoi $V : \Omega \to IR$ est une application bien définie.

2/ Démontrer que :
pour tous $x_1 \in \Omega$, $x_2 \in \Omega$, on a : $|V(x_1) - V(x_2)| \leq \sup_{y \in Y} |f(x_1,y) - f(x_2,y)|$.

3/ Démontrer que :
$\forall x_0 \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \exists \rho = \rho(x_0,\varepsilon) > 0, \forall x \in \Omega, \forall v \in Y, \forall w \in Y,$
$\left(\|x - x_0\| \leq \rho, \|v - w\| \leq \rho\right) \Rightarrow \left(|f(x,v) - f(x_0,w)| \leq \varepsilon\right)$

4/ Démontrer que l'application V est continue sur Ω.

5/ On fixe $x_0 \in \Omega$, et on suppose qu'il existe un unique $y_0 \in Y$ tel que $f(x_0,y_0) = V(x_0)$. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite à valeurs dans Ω qui converge vers x_0. Soit $(y_n)_{n \geq 1}$ une suite à valeurs dans Y telle que, pour tout entier $n \geq 1$, $f(x_n,y_n) = V(x_n)$.
Démontrer que $(y_n)_{n \geq 1}$ converge vers y_0.

PARTIE II

Dans cette deuxième partie, nous étudions des propriétés de différentiabilité de V sous les hypothèses supplémentaires suivantes :

(H1) Ω est ouvert.

(H2) Pour tout $(x,y) \in \Omega \times Y$, la différentielle partielle $f'_x(x,y)$ (la différentielle de l'application partielle $f(\cdot,y)$ au point x) existe, et f'_x est continue sur $\Omega \times Y$.

(H3) Soit $x_0 \in \Omega$ fixé. Il existe un unique $y_0 \in Y$ tel que $f(x_0,y_0) = V(x_0)$.

On fixe $r > 0$ tel que $B(x_0,r) \subset \Omega$.

1/ Soit $x \in B(x_0,r)$. Démontrer que : $V(x) - V(x_0) \geq \left(- \sup_{u \in]x,x_0[} \left\| f'_x(u,y_0) \right\|_{\mathcal{L}} \right) \cdot \|x - x_0\|$.

2/ Soit $x \in B(x_0,r)$. Soit $y_x \in Y$ tel que $f(x,y_x) = V(x)$.
Démontrer que : $V(x) - V(x_0) \leq \left(\sup_{u \in]x,x_0[} \left\| f'_x(u,y_x) \right\|_{\mathcal{L}} \right) \cdot \|x - x_0\|$.

3/ En supposant que $f'_x(x_0,y_0) = 0$, démontrer que V est différentiable en x_0 et que sa différentielle vérifie $V'(x_0) = 0$.

4/ Démontrer que V est différentiable en x_0 et que $V'(x_0) = f'_x(x_0,y_0)$.

PARTIE III

Dans cette partie, nous poursuivons l'étude de propriétés de différentiabilité de V.

Nous supposons que les hypothèses (H1) et (H2) de la partie II sont satisfaites, mais nous ne supposons plus (H3) remplie.

On note $S_1 = \{x \in IR^d \,/\, \|x\| = 1\}$.
Pour chaque $x \in \Omega$, on définit $\Sigma(x) = \{y \in Y \,/\, f(x,y) = V(x)\}$.
Soit $x \in \Omega$, $t \in]0,+\infty[$, $u \in S_1$ et si $(x+tu) \in \Omega$, on définit $M(x,t,u) = \Sigma(x) \cup \Sigma(x+tu)$.
On fixe $x_* \in \Omega$.

1/ Démontrer que, pour tout $x \in \Omega$, $\Sigma(x)$ est non vide et compacte.

2/ On note $\Omega - x_* = \{x - x_* / x \in \Omega\}$, et on définit la fonction $\Psi : (\Omega - x_*) \times Y \to IR$ en posant : $\Psi(h,y) = \begin{cases} \|h\|^{-1}\left(f(x_*+h,y) - f(x_*,y) - \langle f'_x(x_*,y),h\rangle\right) & si\ h \neq 0 \\ 0 & si\ h = 0 \end{cases}$

Démontrer que $\lim_{h\to 0}\left(\sup_{y\in Y}|\Psi(h,y)|\right) = 0$.

3/ Démontrer que $\lim_{t\to 0^+}\left(\sup_{y\in Y}\sup_{u\in S_1}|\Psi(tu,y)|\right) = 0$.

4/ Démontrer que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \theta = \theta(\varepsilon) > 0$, $\forall u \in S_1$, $\forall t \in]0,\theta[$, $\forall y \in \Sigma(x_* + tu)$, $\exists z \in \Sigma(x_*)$ tel que $\|y - z\| < \varepsilon$.

5/ Démontrer que : $\forall t > 0$, $\forall u \in S_1$, $\exists v \in M(x_*,t,u)$ tel que $\forall z \in \Sigma(x_*)$,
$\sup_{y\in M(x_*,t,u)}\langle f'_x(x_*,y),u\rangle - \sup_{y\in\Sigma(x_*)}\langle f'_x(x_*,y),u\rangle \leq \|f'_x(x_*,v) - f'_x(x_*,z)\|_{\mathcal{L}}$.

6/ Démontrer que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists T = T(\varepsilon) > 0$, $\forall t \in]0,T[$, $\forall u \in S_1$
$\left|\sup_{y\in M(x_*,t,u)}\langle f'_x(x_*,y),u\rangle - \sup_{y\in\Sigma(x_*)}\langle f'_x(x_*,y),u\rangle\right| \leq \varepsilon$.

7/ Démontrer que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists T_1 = T_1(\varepsilon) > 0$, $\forall t \in]0,T_1[$, $\forall u \in S_1$
$\frac{1}{t}(V(x_*+tu) - V(x_*)) \leq \sup_{y\in\Sigma(x_*)}\langle f'_x(x_*,y),u\rangle + \varepsilon$.

8/ Démontrer que : $\forall u \in S_1$, $\forall t > 0$,
$\sup_{y\in Y}\left[f(x_*,y) + t.\langle f'_x(x_*,y),u\rangle\right] \geq V(x_*) + t.\sup_{y\in\Sigma(x_*)}\langle f'_x(x_*,y),u\rangle$.

9/ Démontrer que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists T_2 = T_2(\varepsilon) > 0$, $\forall t \in]0,T_2[$, $\forall u \in S_1$,
$\frac{1}{t}(V(x_*+tu) - V(x_*)) \geq \sup_{y\in\Sigma(x_*)}\langle f'_x(x_*,y),u\rangle - \varepsilon$.

10/ Démontrer que, pour tout $u \in S_1$, on a :
$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}(V(x_*+tu) - V(x_*)) = \sup_{y\in\Sigma(x_*)}\langle f'_x(x_*,y),u\rangle$.

11/ Que peut-on dire de la différentiabilité de V en x_* ?

PARTIE IV

Dans cette partie, nous étudions des propriétés de différentiabilité de V, mais nous nous situons dans un cadre différent de celui de la partie II.

Dans cette partie, on se place dans le cas particulier où $m = 2$.

On fixe $\hat{x} \in \Omega$, et on suppose remplies les conditions suivantes :

(C1) Il existe une application continûment différentiable $g : IR^2 \to IR$ telle que le compact Y s'écrive : $Y = \{y \in IR^2 / g(y) = 0\}$.

(C2) f est la restriction à $\Omega \times Y$ d'une application différentiable de $IR^d \times IR^2$ dans IR.

(C3) Il existe $r > 0$ tel que $B(\hat{x},r) \subset \Omega$, et il existe une application différentiable $A : B(\hat{x},r) \to Y$ telle que, pour tout $x \in B(\hat{x},r)$, $V(x) = f(x, A(x))$.

(C4) Pour tout $x \in B(\hat{x},r)$, on note $A(x) = (A_1(x), A_2(x))$, et on suppose que $g'_{y_2}(A_1(\hat{x}), A_2(\hat{x})) \neq 0$ ($g'_{y_2}(y_1,y_2)$ est la dérivée partielle par rapport à la deuxième variable de g au point (y_1,y_2)).

1/ Trouver une relation entre les différentielles $A'_1(\hat{x})$, $A'_2(\hat{x})$ et les dérivées partielles de g.

2/ Démontrer qu'il existe $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $s > 0$, et une application dérivable $\varphi :]A_1(\hat{x}) - r_1, A_1(\hat{x}) + r_1[\to]A_2(\hat{x}) - r_2, A_2(\hat{x}) + r_2[$ tels que : $\forall x \in B(\hat{x},s)$, $V(x) = f\big(x, \big(A_1(x), \varphi(A_1(x))\big)\big)$.

3/ En déduire que V est différentiable en $\hat{x}$, et calculer sa différentielle $V'(\hat{x})$.